第 1 問

すべての正の実数 x, y に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第 2 問

自然数 k に対し，xy 平面上のベクトル

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{k\pi}{4},\ \sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

を考える。a，b を正の数とし，平面上の点 P_0，P_1，$\cdots$，P_8 を

$$P_0 = (0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{P_{2n}P_{2n+1}} = a\,\overrightarrow{v}_{2n+1},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+2}} = b\,\overrightarrow{v}_{2n+2},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

により定める。このとき以下の問に答えよ。

(1) $P_8 = P_0$ であることを示せ。

(2) P_0，P_1，$\cdots$，P_8 を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を a，b を用いて表せ。

(3) 面積 S が 7，線分 P_0P_4 の長さが $\sqrt{10}$ のとき，a，b の値を求めよ。

第 3 問

xy 平面において，曲線 $y = -x^3 + ax$ 上の $x > 0$ の部分に，点 P を次の条件をみたすようにとる。ただし $a > 0$ とする。

> 点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，原点 O における接線が $\angle$QOP を二等分する。

このとき，$\triangle$QOP の面積 $S(a)$ の最小値と，それを与える a の値を求めよ。

第　4　問

半径1cmの半球形の器が水平から角θだけ傾けて固定されている。ただし$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$とする。この器に毎秒$\frac{\pi}{18}$ cm^3の割合で水を入れるとき，入れはじめてから $3 + \cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れだした。このときのθの値を求めよ。